Kurse der QED-Akademie 2018

(Stand: 13. Juli 2018)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Theoretische Informatik und in die Mathematische Logik für Anfänger

von Christoph-Simon Senjak und Jana Lemke

Was kann man berechnen? Wie schnell kann man es berechnen? Und was bedeutet „berechnen“ überhaupt? Mit diesen Fragen beschäftigt sich die theoretische Informatik. Sie bildet zusammen mit der mathematischen Logik die Schnittstelle zwischen Informatik und Mathematik.

Auch wenn es „theoretische“ Informatik heißt, handelt es sich nicht um graue Theorie, sondern um Grundlagen, die auch für die Praxis relevant sind. Elementare Fragen danach, welche Probleme überhaupt lösbar sind, wie effizient sie lösbar sind und was es überhaupt bedeutet, ein lösbares Problem zu sein, werden darin beantwortet. Dazu definieren wir Turing-Maschinen, ein Berechnungsmodell, das formal äquivalent zu einem „handelsüblichen“ Computer ist.

Als Einleitung werden wir uns aber mit der Theorie der deterministischen endlichen Automaten beschäftigen – ein sehr einfaches aber enorm nützliches Berechnungsmodell, über das man sehr viel beweisen kann und das unmittelbar zu regulären Ausdrücken – ein wichtiges Utensil in der Programmierung – führt.

Anschließend wollen wir uns zu stärkeren Berechnungsmodellen vorarbeiten, bis hin zu den Turing-Maschinen. Hiermit werden wir dann einige formale Probleme auf ihre Lösbarkeit analysieren, zum Beispiel das bekannte Halteproblem und das Entscheidungsproblem.

Nachdem wir dann eine genauere Vorstellung davon haben, was so alles überhaupt lösbar ist, werden wir uns ansehen, was davon auch effizient lösbar ist. Wir werden die Problemklassen P und NP definieren um am Ende zu verstehen, was es mit dem bekannten P-NP-Problem – eines der Millenniumsprobleme – auf sich hat.

Ein anderes Berechnungsmodell, das näher an modernen Programmiersprachen ist, ist der Lambda-Kalkül. Er schlägt eine Brücke zwischen Berechenbarkeitstheorie und Mathematik und erlaubt es, Computern beizubringen, formale mathematische Beweise zu überprüfen.

Zum Abschluss werden wir uns dann wenn noch Zeit ist Kripke-Modelle anschauen, die es ermöglichen, zu beweisen, dass man bestimmte mathematische Aussagen nicht beweisen kann.

Voraussetzungen:
Der Kurs richtet sich primär an Schüler. Außer mathematischem Grundverständnis und Interesse an formalem Denken gibt es keine Voraussetzungen. Es sind insbesondere weder Programmierkenntnisse noch ein Computer notwendig.

2 Effiziente Algorithmen

von Tamás Korodi

Ob Routenplaner, Spracherkennung oder Schachprogramme, Algorithmen spielen mittlerweile in vielen Bereichen unseres Lebens eine wichtige Rolle. In diesem Kurs wollen wir uns in die Welt der Algorithmen begeben und uns mit Fragestellungen wie den Folgenden beschäftigen:

1. Jeder QEDler hat Vorlieben für bestimmte Schokoladensorten. Aufgrund des hohen Schokoladenkonsums auf der Akademie ist die Schokolade leider sehr knapp geworden. Wie kann man die restliche Schokolade so an die QEDler verteilen, dass die Vorlieben der einzelnen QEDler möglichst gut erfüllt werden?

2. Zwei Teams von QEDlern treten bei einem mathematischen Wettbewerb gegeneinander an. Jedoch gibt es unter den QEDlern langsamere und schnellere Mitspieler. Wie kann man die Teams so aufteilen, dass beide Teams möglichst gleich stark sind?

3. Ein QEDler hat einen Rubikwürfel völlig verdreht und weiß nicht mehr, wie er ihn zurückdrehen kann. Wie kann er automatisch eine Zugfolge zum Lösen finden?

Insgesamt möchten wir ein weites Spektrum an verschiedenen Gebieten wie etwa Graphen, Geometrie oder Zahlentheorie abdecken. Neben zahlreichen Beispielen werden wir auch die mathematischen Hintergründe erklären. Bei vielen Verfahren ist auf den ersten Blick garnicht klar, wieso sie überhaupt funktionieren und das richtige Ergebnis ausgeben.

Daneben legen wir natürlich ein besonderes Augenmerk auf die *Effizienz*. Es wäre nicht gerade toll, wenn der Algorithmus zwar das richtige Ergebnis liefert, aber die Berechnung 1 Million Jahre braucht oder mehr Speicher benötigt als es im Atome im Universum gibt. Hierzu ist wichtig, die Daten in geeigneten *Datenstrukturen* zu organisieren.

Viele effiziente Algorithmen sind nach ähnlichen Grundprinzipien aufgebaut. Diese wollen wir verstehen und für unsere Zwecke einsetzen. Gerade bei Problemstellungen, die nicht in das übliche Schema passen, kann es notwendig sein, dass man selbst von Grund auf einen neuen Algorithmus entwickeln muss. Hierzu gibt es eine ganze Reihe von Herangehensweisen und Tricks.

Allerdings werden wir aber auch sehen, dass es unter den Problemstellungen einige besonders harte Nüsse gibt, welche sich nach dem momentanen Wissensstand einer effizienten Lösbarkeit entziehen. Hier lassen sich oft nur Näherungslösungen finden, die uns aber je nach Anwendungszweck ausreichen.

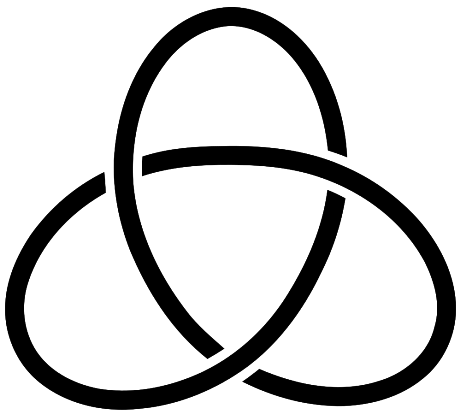
Voraussetzungen:
Der Kurs richtet sich sowohl an Schüler als auch an Studenten, die sich bislang nur oberflächlich mit Algorithmen beschäftigt haben. Es kann sein, dass wir im Kurs etwas programmieren werden, Programmierkenntnisse sind aber nicht notwendig.

Kursleitung:
Tamás Korodi arbeitet in Aachen an seiner Dissertation und programmiert ansonsten in seiner Freizeit gerne.

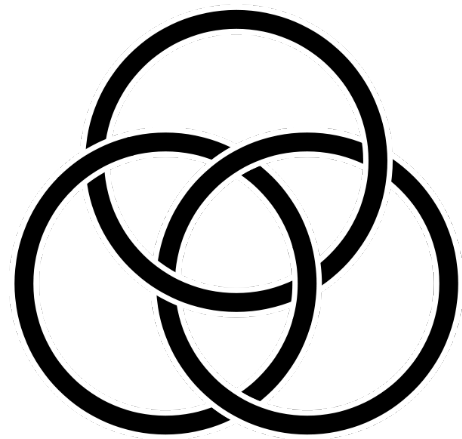
3 Knotentheorie

von Robin Stoll

In diesem Kurs wollen wir über Bänder reden, die mit sich selbst und/oder anderen Bändern verschlungen sind. Eine solche Verschlingung nennen wir *Knoten*.



Der Kleeblattknoten



Die Borromäischen Ringe

Zwei Beispiele für Knoten

Obwohl diese Objekte auf den ersten Blick einfach erscheinen, bilden sie die Grundlage für eine reiche Theorie, die auch heute noch viele unbeantwortete Fragen enthält. Wir werden sie, etwas präziser als hier, einführen und mitsamt ihrer Eigenschaften studieren.

Einen großen Teil unserer Zeit werden wir damit verbingen, einige *Knoteninvarianten* zu definieren, also Zuweisungen von Knoten zu einfacheren Objekten (z.B. Zahlen oder Polynome). Diese werden uns in vielen Fällen erlauben zu zeigen, dass zwei unterschiedlich aussehende Knoten tatsächlich „nicht gleich“ sind, d.h. sich nicht ineinander verformen lassen (was schon ein überraschend nicht-triviales Problem darstellt).

Ein weiteres Beispiel für Dinge, die wir betrachten werden, ist die Operation, die zwei gegebenen Knoten ihr „Produkt“ zuordnet, welches wieder ein Knoten ist. Entsprechend der normalen Multiplikation gibt es auch *Primknoten*, also solche, die sich nicht auf nicht-triviale Weise als Produkt anderer Knoten schreiben lassen. Ein interessantes Ergebnis ist, dass sich, wie wir es von den natürlichen Zahlen gewöhnt sind, jeder Knoten auf eine eindeutige Weise als Produkt von Primknoten schreiben lässt.

Je nachdem wieviel Zeit am Ende noch bleibt, können wir uns noch mit Anwendungen der Theorie beschäftigen, zum Beispiel auf Mannigfaltigkeiten (siehe die entsprechende Kursbeschreibung; wir würden uns aber weniger formal damit auseinandersetzen) oder, außerhalb der Mathematik, auf die Struktur der DNA.

Voraussetzungen:
Außer einer gewissen Vertrautheit mit mathematischer Notation und dem Konzept eines Beweises wird kein weiteres Vorwissen benötigt. Praktisch wäre Kenntnis von Polynomen und der vollständigen Induktion, aber dies kann auch kurz im Kurs nachgeholt werden. Der Kurs richtet sich dadurch vor allem an Schüler, die die 9. Klasse abgeschlossen haben, aber auch alle anderen Interessierten sind herzlich willkommen.

4 Mannigfaltigkeiten

von Matthias Paulsen

Man stelle sich vor, eine Ameise lebt auf der Oberfläche einer Kugel. Kleine Teile der Kugel sehen für sie so aus wie kleine Ausschnitte einer Ebene. Kann die Ameise herausfinden, ob sie sich auf einer Kugel oder einer Ebene befindet? Oder auf einem Donut oder einer Breze? Diese Objekte haben alle gemeinsam, dass sie sich lokal, also in genügend kleinen Bereichen, wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ verhalten, jedoch global eine andere Struktur besitzen können. Mannigfaltigkeiten ermöglichen es, derartige Objekte zu beschreiben, ohne auf einen umgebenden Raum zurückgreifen zu müssen. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit verhält sich lokal wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$.

Mannigfaltigkeiten treten in sehr vielen Situationen auf. Zum Beispiel sind sie heute aus der Sprache der theoretischen Physik nicht mehr wegzudenken. Ohne Mannigfaltigkeiten wäre Albert Einstein nicht in der Lage gewesen, seine Allgemeine Relativitätstheorie sinnvoll zu formulieren. Fasst man die Raumzeit als 4-dimensionale Mannigfaltigkeit auf, wird klar, was es bedeuten soll, dass die Raumzeit gekrümmt ist.

Mannigfaltigkeiten sind ein interessantes und aktuelles Forschungsgebiet. Während sich die 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im Wesentlichen nur durch die Anzahl ihrer Löcher unterscheiden, ist die Klassifikation der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten eine schwierige Aufgabe. Sie wurde erst 2002 durch Grigori Perelman abgeschlossen, der damit auch die berühmte Poincaré-Vermutung bewiesen hat.

Die Differentialtopologie, die sich mit glatten Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten beschäftigt, bietet einen eleganten Weg, über Ableitungen nachzudenken. Während die Differentialrechnung in mehreren Variablen manchmal unschön und technisch wirkt, wird in der abstrakteren Sprache von Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündeln die natürliche Bedeutung von Differentialen sichtbar.

Die grundsätzliche Idee des Zusammenspiels lokaler und globaler Eigenschaften findet sich in vielen Bereichen der Mathematik wieder. Beispielsweise sind Begriffe in der Algebraische Geometrie häufig durch die Theorie der Mannigfaltigkeiten motiviert, etwa Tangentialräume oder Kohomologiegruppen. Daher kann die Beschäftigung mit Differentialtopologie auch nützlich sein, um Konstruktionen in der Algebraischen Geometrie zu verstehen.

Im Kurs werden wir zunächst genau definieren, was eine Mannigfaltigkeit ist und auch einige exotischere Beispiele von Mannigfaltigkeiten kennenlernen. Beispielsweise bildet die Menge aller 2-elementigen Teilmengen eines Kreises ein Möbiusband. Anschließend werden wir das Tangentialbündel und das Differential von glatten Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten einführen. Ohne lange Rechnungen oder Abschätzungen werden wir in der Lage sein, Ableitungen viel allgemeiner als in der Analysis zu definieren. Danach werden wir uns mit Vektorfeldern und Flüssen auf Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Zum Beispiel werden wir beweisen, dass ein Igel nicht ohne Glatze gekämmt werden kann, also jedes Vektorfeld auf der Kugel eine Nullstelle besitzt. Außerdem werden wir das Kotangentialbündel, Differentialformen und die äußere Ableitung einführen. In Verbindung mit dem Satz von Stokes werden wir den De-Rham-Kohomologiering als wichtige Invariante einer Mannigfaltigkeit kennenlernen.

Je nach Interesse und Zeit können wir auch fortgeschrittenere Themen behandeln, etwa Lie-Gruppen, Blätterungen, Koszul-Zusammenhänge und Kobordismen. Außerdem können wir auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten eingehen. Diese sind an jedem Punkt mit einem Skalarprodukt ausgestattet, wodurch wir Längen und Winkel messen können. Erstaunlich ist, dass die Krümmung einer solchen Mannigfaltigkeit ohne einen umgebenden Raum definiert werden kann.

Im Laufe des Kurses werden wir zum Beispiel folgende Fragen beantworten können:

- Warum ist das Tangentialbündel eines Donuts trivial, aber das einer Breze nicht?
- Worum geht es in der berühmten Poincaré-Vermutung?
- Warum ist eine Kugel gekrümmt, aber ein Kreis nicht?

- Warum ist ein Möbiusband nicht orientierbar?
- Warum haben alle Gurken und Bananen die gleiche Gesamtkrümmung?

Voraussetzungen:
Dieser Kurs ist vor allem für Leute gedacht, die in den ersten Semestern sind oder bald mit dem Studium beginnen wollen. Es sind aber alle am Thema Interessierten willkommen, die bereit sind, die benötigten Grundlagen zu lernen. Auf jeden Fall sollte man aus der Schule oder aus anderen Quellen mit der Differenzierbarkeit von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vertraut sein. Hilfreich sind auch Kenntnisse aus der Algebra, zum Beispiel über Gruppen, Ringe und Vektorräume, aber dies ist nicht notwendig. Am Wichtigsten ist es, Spaß daran zu haben, sich mit neuen und ungewohnten Konzepten auseinanderzusetzen und geometrische Anschauung in eine abstrakte und elegante Sprache zu übersetzen.

5 Anschauliche Geometrie

von Nicholas Schwab

Dieser Kurs befasst sich mit Themengebieten der Elementargeometrie, die im Schulunterricht eher vernachlässigt werden. So werden Kurven wie Parabeln und Hyperbeln nur als Graphen bestimmter Funktionen betrachtet. Jedoch haben diese Kurven, die auch als Kegelschnitte bekannt sind, auch sehr schöne geometrische Eigenschaften. Es wird sich im Kurs herausstellen, dass diese Kegelschnitte, zu denen auch der Kreis und die Ellipse gehören, viele Eigenschaften mit dem Kreis gemeinsam haben.

Dies ist kein Zufall. Eine Taschenlampe, die senkrecht Richtung Boden gehalten wird, leuchtet einen Kreis aus. Beginnt man nun sie zu neigen, wird diese Form länglicher, zu einer Ellipse. Je weiter man kippt, desto länger wird diese, bis sie schließlich quasi ins Unendliche geht, sobald man die Lichtquelle waagrecht hält. Dann wird auf dem Boden eine Parabel ausgeleuchtet. Sobald man noch weiter dreht, wird dieses Gebiet zu einer Hyperbel. Dieser Ansatz wird in der *projektiven Geometrie* eingesetzt, womit viele bekannte Aussagen über Kreise auf allgemeine Kegelschnitte übertragen werden können.

Wir werden zu Beginn des Kurses die verschiedenen Kegelschnitte auf unterschiedliche Arten betrachten und dann auf allgemeine Aspekte der projektiven Geometrie eingehen. Wir werden auch sehen, wie sich diese Methoden anwenden lassen um Aussagen, die eigentlich nicht projektiv formuliert sind, einfach zu zeigen. Wenn es die Kurszeit zulässt, werden wir uns noch weitere Geometrien anschauen, wie zum Beispiel die Geometrie auf der Kugel, bei der die Innenwinkelsumme eines Dreiecks stets größer als 180° ist.

Voraussetzungen:
Der Kurs ist vor allem für Schüler gedacht und stellt keine Voraussetzungen, die über Schulwissen der 8. Klasse hinausgehen. Wenn ihr schon Ahnung von projektiver Geometrie habt, ist dieser Kurs wohl nicht der richtige für euch.

6 Komplexe Multiplikation

von Daniel Harrer

Man erhält die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ indem zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Zahl i mit $i^2 = -1$ hinzugenommen wird. Infolgedessen werden sie durch

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

multipliziert. Betrachtet man nun das Betragsquadrat $\|x + iy\|^2 = x^2 + y^2$ so landen wir bei der direkt nachrechenbaren, aber schwer zu findenden, Formel

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Wechseln wir nun zu den ganzen Zahlen, so sehen wir also, dass ein Produkt von Zahlen, die Summe zweier Quadratzahlen sind, sich wieder als eine solche Summe schreiben lässt. Dadurch reduziert sich die Klassifikation der Zahlen dieser Form alsdann auf die Frage, für welche Primzahlen p die Gleichung $p = x^2 + y^2$ eine Lösung $x, y \in \mathbb{Z}$ hat. Interessanterweise sind dies genau jene p, modulo denen es eine Restklasse i mit $i^2 \equiv -1 \mod p$ gibt, man also bereits ein Analogon dieser komplexen Zahl finden kann.

Dieses Wechselspiel zwischen Zahlentheorie, Algebra und Analysis stellt sich als Spezialfall der weitreichenden Theorie der „Komplexen Multiplikation“ heraus. Ihre Kernidee ist, die Geometrie der Gitter – bestimmte Zahlmengen der Form $\Gamma = \{a\alpha + b\beta \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ – als Brücke zu nutzen und sich zu fragen, für welche $c \in \mathbb{C}$ das gedrehstreckte Gitter $c \cdot \Gamma = \{c \cdot \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine Teilmenge von Γ ist. Von besonderem Interesse sind jene Γ, für die es ein solches $c \notin \mathbb{Z}$ gibt, denn, wie schon Johann Carl Friedrich Gauß erkannt hatte, stehen sie in engem Bezug zu den Termen der Form $ax^2 + bxy + cy^2$.

Wir wollen all dies nutzen, um vollständig zu begreifen, wann sich eine (Prim)zahl als $x^2 + ny^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt und um zu lernen, was es mit Genustheorie sowie dem „Kroneckerschen Jugendtraum“ auf sich hat. Unterwegs werden wir diversen Aussagen, wie etwa dem quadratischen Reziprozitätsgesetz oder dem Dirichletschen Primzahlsatz, begegnen und sie in ein neues Licht rücken, wozu wir vielerlei mathematische Teilbereiche einvernehmen:

- Galoistheorie, um die komplexe Konjugation zu verallgemeinern,
- Funktionentheorie, um die gitterklassifizierende j-Funktion zu verstehen,
- algebraische Zahlentheorie, um Ideale eines Ringes als Gitter aufzufassen,
- Klassenkörpertheorie, um via Reziprozitätsgesetze all dies zu vereinen.

Vorkenntnisse in diesen vier Gebieten sind jedoch keineswegs vonnöten, da alle verwendeten Begriffe und Sätze im Laufe des Kurses detailliert eingeführt und ausführlich erläutert werden.

Voraussetzungen:
Eine gewisse Vertrautheit mit Mathematik im Allgemeinen und Grundlagen der Algebra und Analysis im Speziellen wird empfohlen, weshalb sich dieser Kurs an Studenten richtet.

7 Enter the Matrix

von Jörn Stöhler

Simulationen sind ein wunderbares Spiel- und Werkzeug für jeden Wissenschaftler. Ob man nun die Rotation einer Galaxie, den Einfluss eines Vulkanausbruchs auf das Klima, oder das Wackeln eines Wackelpuddings simuliert: Freude und Spaß sind garantiert.

Dieser Kurs ist als eine Einführung in das Erstellen von akkuraten Simulationen gedacht. Die Grundlagen und die wichtigsten Algorithmen werden im Laufe des Kurses erläutert. So ist es üblich für Simulationen, die einen zeitlich fortschreitenden Prozess abbilden, jeweils den aktuellen Zustand des simulierten Objekts zu speichern, und dann den Zustand eine kurze Zeitspanne später zu berechnen. Die korrekte Wahl deren Länge ist oft sehr wichtig, entscheidet sie doch darüber, wie viel Rechenleistung benötigt wird und wie genau sie die Wirklichkeit abbildet. Eine halb so große Zeitspanne bedeutet oft, dass die Simulation etwas genauer wird, der Computer aber doppelt so viele Rechenschritte braucht, um den gleichen Prozess zu simulieren.

Auch viele unscheinbare Fehler werden im Verlauf der Kurszeit angesprochen. Diese machen oft den Unterschied zwischen einer nur halb-gelungenen und einer hoch-akkuraten Simulation aus. Zum Beispiel neigen virtuelle Planetensysteme oft zu exponentiellem Energieverlust oder -zuwachs. Dies führt dann dazu, dass Planeten in die Sonne stürzen oder davon fliegen.

Wir wollen uns dabei nicht mit nervigen Rechnungen aus Numerik und Analysis aufhalten, sondern nur kurz über das anschauliche Problem, die Ursachen und die verschiedenen bekannten Lösungsansätze reden.

Ein möglichst großer Teil der Kurszeit wird für eigene Projekte verwendet. Diese können alles mögliche sein, es empfiehlt sich jedoch im Kurs die Durchführbarkeit einer Idee, sowie die dafür eventuell notwendigen Vorkenntnisse an Physik, Biologie, etc. zu klären. Dabei soll erst ein lauffähiger Prototyp als Programm entwickelt werden, der dann auf die gewünschte Qualität verfeinert wird.

Voraussetzungen:
Dieser Kurs macht keine Einschränkungen an die Klassenstufe. Programmierkenntnisse sind jedoch unabdingbar. Ein Teilnehmer sollte in der Lage sein, selbstständig Algorithmen in Code umzusetzen und einen Überblick über seine Projektstruktur zu behalten. Beispiel: wer schonmal einen Lösungsalgorithmus für die Türme von Hanoi geschrieben hat, ist für diesen Kurs geeignet. Der Kursleiter selbst beherrscht die Sprachen Java, Scala, C und Python.

Kenntnisse in Analysis, Differentialgleichungen und linearer Algebra sind hilfreich bei manchen Projekten, können aber auch im Kurs erarbeitet werden. Andere Projekte kommen gänzlich ohne Fachwissen aus.

Eigene Themenideen sind vorab nicht nötig, dafür ist im Kurs hoffentlich genug Zeit. Ein eigener Laptop ist mitzubringen, und es empfiehlt sich die favorisierte Programmierumgebung vorab einzurichten, um nicht auf das langsame Internet vor Ort angewiesen zu sein. Auf die Rechenleistung muss kein Wert gelegt werden.

Kursleitung:
Jörn studiert sowohl Mathematik als auch Physik in München und hat schon unzählige Simulationen geschrieben und optimiert.

8 Von Quantenmechanik zu Schwertern

von Jörn Stöhler

In der Physik kann man mit einigen wenigen Regeln eine Vielzahl verschiedener Beobachtungen erklären. Ein einfaches Gesetz der Schwerkraft ($F = m \cdot g$) und die Axiome Newtons erklären sowohl die Flugbahn einer Kanonenkugel, als auch die Schwingung eines Metronoms.

Selbst das Archimedische Prinzip, welches besagt, dass ein schwimmender Körper genau so viel Wasser verdrängt wie er selbst wiegt, lässt sich auf die gleichen Gesetze zurückführen.

Wir wollen uns in diesem Kurs mit der Frage beschäftigen, wie viele fundamentale Gesetze man eigentlich braucht. Oder, anders formuliert: Lässt sich aus den Regeln der Quantenmechanik herleiten wie man ein gutes Schwert schmiedet?

Der Kurs wird dabei ein großer Streifzug durch die Physik, jedoch in anderer Reihenfolge als man es gewöhnt ist: wir beginnen bei den modernen Gesetzen der kleinsten bekannten Teilchen, also Theorien die es erst seit den 1900er Jahren gibt, und arbeiten uns rückwärts durch die Menschheitsgeschichte bis wir die Gesetze und Prinzipien, die hinter dem Schmieden von Schwertern stecken, zufriedenstellend begründet haben.

Ein Großteil der Zeit wird für Erklärungen und das Verständnis von Modellen und Theorien benötigt, aber auch der mathematische Hintergrund soll nicht unerwähnt bleiben. Letztendlich werden folgende Gebiete der Physik miteinander verknüpft:

- Quantenmechanik: Elementarteilchen und wie normale Materie daraus gebildet wird.
- Atomphysik: Wasserstoffatom und andere Atome.
- Chemie: Moleküle und chemische Reaktionen wie Verbrennung.
- Thermodynamik: Temperatur und Energie.
- Festkörperphysik: Metalle und Kristalle.
- Mechanik: Gesetze der Bewegungslehre, Spannung, Elastizität und Festigkeit.

Voraussetzungen:
Dieser Kurs richtet sich an Schüler ab der 10. Klasse und Studenten. Kenntnisse von Analysis, insbesondere Ableiten und Integrieren von Funktionen, sind notwendig. Komplexe Zahlen, Vektorräume und lineare Algebra sind hilfreich, werden aber bei Bedarf im Eilverfahren erklärt. Vorkenntnisse in den beschriebenen Teilgebieten der Physik sind aber in keinster Weise nötig. Selbst ein beginnender Physikstudent wird sich nicht langweilen.

Kursleitung:
Jörn studiert sowohl Mathematik als auch Physik in München.

9 Kombinatorische Topologie

von Aras Ergus

In diesem Kurs werden wir versuchen, geometrische Objekte (wie der n-dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ oder die $(n-1)$-dimensionale Sphäre darin) durch ihre *qualitativen Eigenschaften* (z.B. Anzahl der „k-dimensionalen Löcher") zu untersuchen.

Dazu werden wir uns überlegen, wie man ein gegebenes geometrisches Objekt X dadurch bauen kann, dass man mit Punkten anfängt, diese mit Geraden verbindet, Flächen zwischen den Geraden einfüllt und ggf. die Konstruktion in höheren Dimensionen weiterführt. Aus dieser kombinatorischen Information werden wir dann algebraische Objekte wie die *Euler-Charakteristik* $\chi(X)$ und die *Homologie* $H_*(X)$ definieren, die uns dabei helfen werden, viele Fragen über X zu beantworten.

Als Anwendungen dieses Ansatzes werden wir viele Spaßfakten beweisen können, z.B.

- **Fixpunktsatz von Brouwer:** Egal wie man eine Landkarte hält, solange man in dem auf der Landkarte abgebildeten Bereich ist, gibt es einen Punkt auf der Landkarte, der genau über dem entsprechenden Punkt auf der Erdoberfläche liegt.

- **Eulersche Polyederformel:** Seien E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen eines beschränkten konvexen Polyeders. Dann gilt: $E - K + F = 2$.

Bevor wir diesen Ansatz präzise machen können werden wir uns am Anfang des Kurses mit den Grundbegriffen und den algebraischen Werkzeugen, die wir später brauchen werden, vertraut machen. Außerdem wird ein wesentlicher Teil der Kurszeit interessanten Beispielen und Übungsaufgaben gewidmet sein.

Voraussetzungen:
Dieser Kurs richtet sich an ältere Schüler*innen und jüngere Student*innen. Keine besonderen Vorkenntnisse werden benötigt.

Obwohl die untersuchten Objekte ähnlich sind wird in diesem Kurs eine andere Methodik verwendet als in den Topologiekursen vergangener Akademien. Daher baut dieser Kurs einerseits *nicht* auf diesen vergangenen Kursen auf, andererseits könnten auch diejenigen, die sich schon mit der Fundamentalgruppe auskennen, in diesem Kurs viel Neues lernen.

Kursleitung:
Aras hat an der Universität Bonn Mathematik studiert und promoviert seit einem Jahr an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Lausanne (EPFL) über algebraische Topologie.

10 Bilderkennung mit neuronalen Netzen

von Daniel Kirch

Die Frage, wie man auf einem Bild mithilfe eines Computers Gegenstände, Gesichter oder sogar Text erkennen kann, ist eigentlich so alt wie die Informatik selbst. Dennoch gelang es erst vor wenigen Jahren durch entscheidende Fortschritte in der Theorie der neuronalen Netze (und nicht zuletzt wegen der höheren Rechenleistung heutiger Computer) bei Aufgaben in diesem Bereich eine Performance zu erreichen, die die eines Menschen ähnlich ist oder sogar überlegen. Wir wollen uns in diesem Kurs neuronalen Netzen von zweiten Seiten annähern, von der theoretischen und der praktischen. Dementsprechend ist auch der Kurs zweigeteilt: Vormittags werden wir die mathematischen Hintergründe erarbeiten und neudeutsche Begriffe wie forward pass, backpropagation und overfitting, sowie Strategien zur Regulierung und Optimierung von neuronale Netzen lernen. Nachmittags werden wir Code zum Trainieren von neuronalen Netzen schreiben und die am Vormittag gelernten Methoden an konkreten Beispielen ausprobieren.

Voraussetzungen:
Für den mathematischen Teil braucht man höherdimensionale Analysis (also Analysis I & II, v.a. höherdimensionale Ableitungen und die Kettenregel). Im praktischen Teil werden wir mit Python arbeiten, aber es reicht wahrscheinlich, wenn du schon mal mit irgendeiner Programmiersprache gearbeitet und von Konzepten wie objektorientierter Programmierung und Parallelisierung gehört hast. Außerdem empfiehlt es sich einen Laptop mitzubringen, ist aber nicht zwingende Notwendigkeit.

> Theory is when you know something, but it doesn't work. Practice is when something works, but you don't know why. Programmers combine theory and practice: Nothing works and they don't know why. (Unkown)