# 1 Funktionale Programmierung mit Haskell

**Kursleitung:** Aras Ergus

## Kursinhalt

Funktionale Programmierung ist ein Programmierparadigma, in dem Programme aus Bausteinen aufgebaut werden, die möglichst nah an Funktionen im mathematischen Sinne sind – d.h. sie sollen bei gleichen Eingabewerten unabhängig von anderen Teilen des Programms immer das gleiche Ergebnis liefern (und nichts anderes tun). Haskell ist eine Programmiersprache, die auf diesem Paradigma basiert.

Wir werden in diesem Kurs lernen, wie man Programme in Haskell schreibt. Dabei werden wir insbesondere ganz viele rekursive Funktionen und Funktionen höherer Ordnung (d.h. Funktionen, deren Argumente Funktionen sind) schreiben, übliche (und unübliche) Datenstrukturen in Haskell implementieren und die Magie von sogenannten Monaden erleben.

Der Kurs wird mit vielen Programmierübungen (und evtl. einem größeren Projekt gegen das Ende) möglichst interaktiv gestaltet sein. Je nach Zeit und Interesse können wir uns evtl. auch die Grundlagen der Theorie hinter Haskell, also der typisierten Lambda-Kalküle und deren Semantik in kartesisch abgeschlossenen Kategorien, anschauen.

## Voraussetzungen

Dieser Kurs ist für alle Altersklassen geeignet, soweit ein Computer bedient werden kann. Programmierkenntnisse in anderen (nicht-funktionalen) Sprachen können an gewissen Stellen hilfreich sein, sind aber nicht nötig, da wir mit der funktionalen Programmierung von Grundlagen anfangen werden.

Möglichst jede*r Teilnehmer*in sollte (insbesondere für die Übungen) einen Computer dabei haben. Für die Teilnehmer*innen, die keinen Computer auf die Akademie mitbringen können, können wir versuchen, Laptops zu organisieren.

# 2 Symmetriegruppen
## – Die Mathematik hinter Kristallen und Fußbällen

**Kursleitung:** Tamás Korodi promoviert an der RWTH Aachen im Fachbereich algorithmische Algebra.

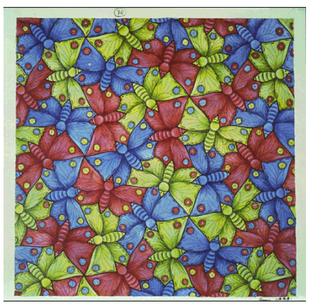
## 2.1 Kursinhalt

Überall im Alltag begegnen uns Gegenstände, welche bestimmte Symmetrien aufweisen. Dazu müsst ihr euch nur einen Fußball in die Hand nehmen, oder mal einen näheren Blick auf euren Teppich oder Parkettboden werfen. Ebenso treten auch in der Natur teils völlig unterschiedliche Arten von Symmetrien auf, sei es in Bienenwaben, Blütenblättern oder Schneeflocken.

Das Ziel dieses Kurses, ist es die Mathematik hinter solchen Symmetrien zu verstehen. Hierzu werden wir uns am Anfang des Kurses einfache Beispiele wie die *platonischen Körpern* anschauen. Daraus entwickeln anschließend eine allgemeine Theorie mit welchen wir auch schwierigere Anwendungsfälle untersuchen können.

Ein weiteres Beispiel, mit welchem wir uns beispielsweise im Kurs auseinandersetzen werden, sind regelmäßige *Tapetenmuster* in der Ebene. Unter eine Tapetenmuster verstehen wir dabei die Zerlegung der Ebene viele gleichartige Formen. Hierbei interessieren wir uns vor allem für solche Muster, welche eine periodische Struktur ausweisen, also sich nach einer Weile wiederholen.

Es stellt sich heraus, dass es insgesamt 17 verschiedene Konstruktionsweisen für solche Tapetenmuster gibt. Zwei dieser Möglichkeiten sieht man in der folgenden Kunstwerken von M.C.Escher [1]:



Zum Verständnis dieser Muster ist wichtig, die vorliegenden Symmetrien dieses Muster zu kennen. Um solche Symmetrien mathematisch exakt beschreiben können, benötigen wir die *Gruppentheorie* als wichtiges mathematisches Hilfsmittel. Aus diesem Grund wird es im Kurs auch eine Einführung in die Gruppentheorie geben. Anhand der Gruppentheorie

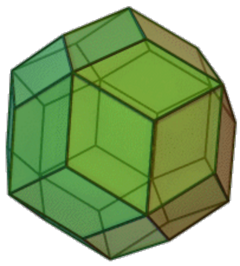
[1] http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Escher_Artwork_Gallery

werden wir alle 17 Möglichkeiten für die Tapetenmuster bestimmen und mathematisch beweisen, dass außer diesen keine weiteren gibt.

Anschließend verallgemeinern wir die Theorie auf den dreidimensionalen Raum und analysieren hier ebenfalls die periodischen Raumfüllungen. Diese führen uns zu den 230 *kristallographischen Gruppen*, welche bei der Untersuchung von Kristallstrukturen eine wichtige Rolle spielen.

Während des Kurses wird es natürlich viele anschauliche Bilder und Beispiele geben. Auch schauen wir uns ein paar verwandte Fragestellungen an wie z.B.:

- Wie lassen sich faire Würfel konstruieren, die nicht würfelförmig sind? (Man beachtete hier die Mehrdeutigkeit des Begriffs „Würfel“) Beispielsweise kann man faire 30-seitige „Würfel“ konstruieren.[2]



- Wie schauen aperodische Pflasterungen der Ebene aus, also Pflasterungen, welche sich nirgendwo periodisch wiederholen?

## 2.2 Voraussetzungen

Der Kurs ist für Schüler ab der Mittelstufe geeignet. Besondere Vorkenntnisse müssen nicht mitgebracht werden. Alle nötigen theoretischen Grundlagen werden während des Kurses erarbeitet.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_triacontahedron

# 3 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

**Kursleitung:** Luise Puhlmann.

## Kursinhalt

In diesem Kurs wird es um lineare Darstellungen endlicher Gruppen gehen—also um einen Homomorphismus von einer Gruppe in die Automorphismengruppe eines Vektorraums. Eine wesentliche Idee der Darstellungstheorie ist es, komplizierte Gruppen besser verstehen zu können, wenn man sich anschaut, wie sie auf Vektorräumen wirken.

Dir sagen diese Begriffe gar nichts? Keine Angst, am Anfang des Kurses werden wir eine kleine Einführung in die lineare Algebra machen. Du brauchst also keine Voraussetzungen außer der Bereitschaft, mit abstrakteren Gebilden zu arbeiten — auch wenn wir natürlich viele anschauliche Beispiele machen werden. Darstellungstheorie ist in vielen wissenschaftlichen Bereichen—nicht nur der Mathematik— von Bedeutung und Resultate aus diesem Themenbereich lassen sich in den überraschendsten Kontexten entdecken. Beispielsweise nutzt der Beweis des großen Satzes von Fermat unter anderem darstellungstheoretische Methoden. Aber auch schon auf viel grundlegenderen Ebenen, auf denen wir uns auch bewegen werden, gibt es einige interessante und schöne Ergebnisse. Nach einer Einführung in die lineare Algebra (die übrigens auch eine Wiederholung sein kann, falls du doch schon einiges davon weißt) werden wir definieren, was eine Darstellung ist, uns einfache Eigenschaften von Darstellungen überlegen und auch zu einigen kleinen Gruppen die ersten Darstellungen finden. Ein Ziel des Kurses wird es sein, den Satz von Maschke zu beweisen, also zu zeigen, dass jede Darstellung die Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

## Voraussetzungen

Du bist in der Zielgruppe für den Kurs, wenn du in etwa in der Mittelstufe bist und Spaß an abstraktem Denken hast. Ein bisschen Kenntnisse aus der linearen Algebra sind nicht erforderlich, schaden aber auch nicht. Wenn du allerdings das Gefühl hast, dich schon sehr gut in linearer Algebra auszukennen, dann lernst du im Kurs zumindest am Anfang nichts Neues.

# 4 Einführung in die Zahlentheorie

**Kursleitung:** Christoph-Simon Senjak (CSS) hat Mathematik und Informatik an der LMU studiert, ist (hoffentlich) bald PhD in Informatik, und hat dieses Semester eine Zahlentheorie-Vorlesung betreut.

Nicholas Schwab wird CSS beim Leiten des Kurses helfen. Er studiert Mathematik im zweiten Semester an der Universität Bonn.

## Kursinhalt

Der Kurs beschäftigt sich mit elementarer Zahlentheorie und richtet sich an die jüngeren Teilnehmer. Der genaue Kursinhalt wird sich an der Vorbildung und den Vorstellungen der Teilnehmer orientieren.

Wir werden mit grundlegenden Resultaten wie der Existenz von unendlich vielen Primzahlen und der eindeutigen Primfaktorzerlegung beginnen. Das können wir danach auf andere Zahlenmengen verallgemeinern. Wir können uns auch mit asymptotischen Aussagen über die Häufigkeit der Primzahlen beschäftigen. Weitere mögliche Themen sind Kryptographie und Algorithmik als Anwendung der Zahlentheorie, hier wäre es auch möglich kleinere Programme selbst zu schreiben.

## Voraussetzungen

Wie schon gesagt ist die Zielgruppe dieses Kurses vor allem die jüngeren Schüler. Wettbewerbserfahrung und Programmierkenntnisse können zwar nicht schaden, sind aber nicht notwendig. Mitbringen sollte man grundsätzlich Schulwissen, mathematisches Interesse und die Fähigkeit, Fragen zu stellen.

# 5 Traveling Salesman Problem

**Kursleitung:** Stefan Rabenstein.

## Kursinhalt

Im Laufe des letzten Jahrhunderts ist das Interesse daran, mathematische Probleme algorithmisch zu lösen stark gewachsen. Grund dafür ist natürlich, dass Algorithmen auf Computern implementiert werden können, was es ermöglicht, komplexe Probleme mit überschaubarem Aufwand zu lösen. Je grösser die zu lösenden Instanzen sind, desto schnellere Algorithmen werden hier benötigt.

Das Traveling Salesman Problem ist eines der am besten bekannten und am meisten untersuchten Probleme. Gegeben ist eine Menge $V$ von Städten und ihre Abstände zueinander. Gesucht ist eine kürzeste Tour, die jede Stadt ein mal besucht und dort endet, wo sie gestartet hat. Es ist kein schneller Algorithmus bekannt, der dieses Problem löst (und es wäre nicht überraschend, wenn kein solcher Algorithmus existiert). Allerdings gibt es sogenannte Approximations Algorithmen, die in wenig Zeit eine Tour finden, die höchstens einen gewissen Faktor länger ist als das Optimum.

In dieses Kurs wollen wir verschiedene (Approximations-)Algorithmen für das Traveling Salesman Problem (und eventuell für Varianten davon) behandeln. Wir werden zunächst auf Christophides Algorithmus hinarbeiten. Dabei handelt es sich um einen Faktor $\frac{3}{2}$ Approximationsalgorithmus, der schon lange bekannt ist. Hierzu werden wir minimale Spannbäumen, gewichstmaximalen Matchings (auch in nicht bipartiten Graphen) und T-joins behandeln. Christophides Algorithmus selbst wird dann sehr einfach sein. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie wir danach weitermachen. Ein mögliches Thema ist etwa der $\frac{7}{5}$ Approximationsalgorithmus für das sogenannte graphische Traveling Salesman Problem aus dem 2012 erschienen Paper *Shorter Tours by Nicer Ears*. Dafür müssten wir und unter anderem mit Ohrenzerlegungen beschäftigen.

## Voraussetzungen

Vorwissen ist für diesen Kurs nicht notwendig. Je nach Interesse kann er entweder auf ältere (nach eigenem ermessen) Schüler und Studenten ausgerichten oder für Teilnehmer beliebigen Alters (dann mit reduziertem Inhalt) gehalten werden. Ihr könnt die Varianten des Kurses als *Traveling Salesman Problem (Oberstufe+)* oder *Traveling Salesman Problem (alle)* getrennt in den Kurswahlen angeben.

# 6 Einführung in die Topologie

**Kursleitung:** Robin Stoll und Leon Hendrian.

## Kursinhalt

In diesem Kurs wollen wir lernen, was es mit dem Begriff Topologie auf sich hat. Grob gesagt geht es darum, ob sich Dinge ineinander deformieren lassen, ohne sie zu zerreißen oder zu verkleben. Ein klassisches Beispiel ist die Teetasse, die sich zwar in einen Doughnut, nicht aber in einen Fußball verformen lässt.

Aber wie soll man von zwei Sachen eigentlich entscheiden, ob sie bis auf Verformung gleich sind (und was soll das überhaupt genau heißen)? Ein erster Ansatzpunkt wäre, die Anzahl der Löcher zu zählen, da sich diese bei Verformungen nicht ändert. Wie aber soll man die Anzahl der Löcher präzise bestimmen? Und gibt es womöglich verschiedene Arten von Löchern, z.B. das des Doughnuts im Vergleich zum Hohlraum in einem Fußball?

Ein erster Schritt zur Beantwortung wird für uns die sogenannte Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ sein. Im Wesentlichen besteht sie aus allen Möglichkeiten, ein elastisches Gummiband im Objekt $X$ zu verlegen, wobei wir nicht zwischen ineinander deformierbaren Bändern unterscheiden wollen. Eine genaue Betrachtung zeigt dann, dass $\pi_1(\text{Fußball}) = \{0\}$ und $\pi_1(\text{Doughnut}) = \mathbb{Z}$.

Interessanterweise hat bereits $\pi_1(X)$ Anwendungen weit jenseits der Bestimmung von Formen: unter anderem beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra, laut dem jedes nichtkonstante komplexe Polynom eine komplexe Nullstelle hat, und befassen uns mit der Frage, ob beziehungsweise wie man ein Bild mit einem Faden so an $n$ Nägeln aufhängen kann, dass es herunterfällt, sobald man einen beliebigen dieser Nägel aus der Wand zieht.

Bevor wir uns mit diesen Fragen mathematisch präzise beschäftigen können, werden wir einige grundlegende Begriffe einführen. Dazu gehören der des topologischen Raums, der der Gruppe (je nach Vorkenntnissen) und ein paar weitere, die uns im Verlauf des Kurses nützlich sein werden.

Ergänzt wird der Kurs (innerhalb der Kurszeit) durch viele interessante Übungsaufgaben.

## Voraussetzungen

Dieser Kurs richtet sich vor allem an ältere Schüler und jüngere Studenten. Es wird außer Interesse am Thema kein Vorwissen benötigt.

# 7 Maßtheorie

**Kursleitung:** Matthias Paulsen.

## Kursinhalt

Viele Menschen können sich etwas unter dem Flächeninhalt einer Menge von Punkten in der Ebene oder dem Volumen einer Menge von Punkten im Raum vorstellen. Aber wie kann man das mathematisch präzise definieren? Lässt sich überhaupt auf konsistente Weise allen Mengen einen Flächeninhalt bzw. ein Volumen zuordnen, ohne dass Widersprüche entstehen? Wie ist es möglich, dass ein einzelner Punkt den Flächeninhalt 0 hat, aber einzelne Punkte zusammen eine Menge bilden können, die einen größeren Flächeninhalt hat?

Die Maßtheorie untersucht, wie durch reelle Zahlen die Größe von Mengen gemessen werden kann. Sie ist die Grundlage für die moderne Wahrscheinlichkeits- und Integrationsrechnung. Im Kurs werden wir uns aber ausschließlich mit reiner Maßtheorie beschäftigen. Zunächst wird es eine Einführung in Mengensysteme und Maße geben. Anschließend wollen wir das Lebesguemaß konstruieren, das im Zwei- und Dreidimensionalen mit der gewöhnlichen Vorstellung von Flächeninhalt oder Volumen übereinstimmt, und wir werden sehen, dass nicht alle Mengen messbar sind. Wir werden auch andere Maße kennenlernen, etwa das Hausdorff-Maß, mit dem man in einem beliebigen metrischen Raum zum Beispiel 2,71-dimensionale Objekte messen kann. Sofern noch Zeit ist, können fortgeschrittenere Themen der Maßtheorie behandelt werden, wie die Vervollständigung von Maßen oder das Lifting-Theorem.

## Voraussetzungen

Der Kurs richtet sich vor allem an Oberstufenschüler und Studienanfänger. Man braucht keine speziellen Vorkenntnisse.

# 8 Funktionentheorie+

**Kursleitung:** Daniel Harrer ($\zeta X$).

## Kursinhalt

Dieser Kurs befasst sich mit der Funktionentheorie, auch bekannt als komplexe Analysis, welche differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexer Zahlen betrachtet. Unerwarteterweise, und anders als im Reellen, verhalten sich diese sehr schön: sofern man eine solche Funktion einmal ableiten kann, so ist dies beliebig oft möglich, und wenn zwei solche Funktionen in der Nähe einer Zahl übereinstimmen, so sind sie überall gleich.

Natürlich gelten auch die gewohnten Eigenschaften und Rechenregeln weiterhin. Integrale haben aber im Komplexen plötzlich deutlich mehr Spielraum, da man dort nicht nur über ein Intervall, sondern auch entlang einer sich durch die Ebene windenden Kurve integrieren kann. Dies führt zu Effekten, die im Eindimensionalen gar nicht erst erfassbar wären, wie etwa das Integral der Funktion $1/x$ um ihre Polstelle $x = 0$ herum. Diese neuen Freiheiten machen das Ganze jedoch nicht komplizierter, sondern sogar einfacher. Ein Beispiel hierzu ist der *Residuensatz*, laut dem sich viele Integrale durch eine endliche Summe ausdrücken lassen, sowie umgekehrt.

Wir werden uns vornehmlich mit *elliptischen Funktionen* und *Modulformen* beschäftigen. Erstere sind Funktionen, die in zwei Richtungen periodisch sind, so wie die Sinusfunktion dies zumindest in einer Richtung ist, und letztere erfüllen eine ähnliche, leicht kompliziertere Symmetrie. Interessanterweise stehen Eigenschaften davon in direktem Bezug zur Zahlentheorie, wodurch wir unter anderem die folgenden Resultate zeigen werden:

- Eulers Formel $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ und ihre Verallgemeinerungen.
- Die Anzahl der Möglichkeiten, $n \in \mathbb{N}$ als Summe von vier Quadraten zu schreiben, ist $8 \cdot \sum_{4 \nmid d \mid n} d$.
- Für $\sigma_k(n) := \sum_{d \mid n} d^k$ gilt die Identität $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \cdot \sum_{a=1}^{n-1} \sigma_3(a) \cdot \sigma_3(n-a)$.
- Eine Zahl hat genauso viele Darstellungen als Summe von gerade vielen natürlichen Zahlen, wie als Summe von ungerade vielen, außer wenn sie von der Form $\frac{3k^2+k}{2}$ ist.

## Voraussetzungen

In den ersten Kurseinheiten werden wir uns alle Grundlagen der Funktionentheorie erarbeiten (bzw. wiederholen), dabei jedoch technische Beweise auslassen um zügig zu den eigentlichen Kernpunkten zu kommen, da wir uns auf die interessanten und wichtigen Aspekte konzentrieren möchten. Somit ist, falls man mit diesem Gebiet noch nicht anderweitig zu tun hatte, ein wenig „Mut zur Lücke“ erforderlich, es soll aber jede Aussage ausführlich erklärt und ggf. auf Nachfrage auch ihr Beweis skizziert werden. Desweiteren ist es ratsam, bereits einmal mit Stetigkeit, Ableitungen und Integralen gearbeitet zu haben. Eine Vorlesung Analysis I ist dazu definitiv hinreichend, wobei aber ein intuitives Verständnis der drei vorgenannten Themen genügt. Dieser Kurs ist auch für jene geeignet, welche schon mit Funktionentheorie zu tun hatten und gerne einmal wissen möchten, wozu man diese mannigfaltige Theorie eigentlich verwenden kann.